האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתימטיקה

בחינה בלוגיקה מתימטית (1) (80423)

סמסטר הסתיו – תשס"ב – מועד א'

המורים: פרופ' אהוד הרושובסקי, פרופ' עזריאל לוי — הזמן: שעתיים

הבחינה מחולקת לשני חלקים. על התלמיד לענות על השאלה בחלק א' ועל שתי שאלות בחלק ב'. באותם מקרים בהם המינוח בשתי קבוצות ההרצאה היה שונה מובאים כאן המונחים ששימשו בכל אחת מן הקבוצות, היכן שאחד מהם מופיע בסוגריים.

חלק א': ענה על שאלה מס' 1

1. ענה בקצרה על השאלות א'-ד' הבאות. תשובה על כל אחת משאלות אלו צריכה להיות באורך של כחמש שורות לכל היותר.

א. הגדר את הערך של שם עצם, לאו דווקא קבוע, במבנה נתון של תחשיב היחסים.

ב. כתוב בשפת תחשיב היחסים את הטענה הבאה על גרף לא מכוון שצמתיו צבועים בשני צבעים, כאשר העולם הוא קבוצת הצמתים (הקודקודים) של הגרף, G הוא סימן יחס דו מקומי כך שה-משמעות של $G(x,y)$ היא שהצמתים x ו-y מחוברים ע"י צלע, B, R-ו (קיצורים ל-blue ול-red) הם סימני יחס חד מקומיים המציינים את הצבע בו צבוע צומת.
הטענה היא שכל צומת צבוע בדיוק בצבע אחד, שני צמתים מחוברים אינם צבועים באותו צבע, וכל צומת בגרף מחובר לפחות לשני צמתים.

ג. תהי $\phi(R)$ נוסחה בה מופיע סימן יחס דו מקומי R, ותהי $\phi(\approx)$ אותה נוסחה שבה הוחלף R בכל מקום בסימן השיוויון $\approx$, המתפרש תמיד כזהות. האם מכך ש- $\phi(R)$ אמיתית לוגית נובע ש- $\phi(\approx)$ אמיתית לוגית? האם מכך ש- $\phi(\approx)$ אמיתית לוגית נובע ש- $\phi(R)$ אמיתית לוגית? לכל אחת משתי שאלות אלו אם תשובתך חיובית הסבר אותה ואם היא שלילית לווה אותה בדוגמה נגדית.

ד. כמה מבנים שונים קיימים בשפה עם סימן יחס דו-מקומי וסימן פונקציה דו-מקומית שעולמם הוא הקבוצה $\{1\}$.

חלק ב': ענה על שתים מבין השאלות 2 עד 4 הבאות.

תשובותיך על השאלות צריכות לכלול הוכחות מלאות וברורות, אלא אם נאמר במפורש שאין צורך להוכית. הקפד לצטט באופן מלא וברור את המשפטים בהם הנך משתמש. אם תענה על שלוש השאלות אז ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות.

2. כידוע, כל קבוצה סופית אפשר לסדר בסדר מלא. השתמש במשפט הקומפקטיות להוכיח שעל כל קבוצה קיים יחס סדר מלא.

3. תהי Γ קבוצת פסוקים בתחשיב היחסים ונניח, לשם פשטות, שבפסוקי Γ לא מופיעים סימני הקשרים $\rightarrow$ ו-$\leftrightarrow$. תהי Γ בעלת התכונות הבאות:

(1) אם $\phi \wedge \psi \in \Gamma$ אז $\phi, \psi \in \Gamma$.

(2) אם $\phi \vee \psi \in \Gamma$ אז $\phi \in \Gamma$ או $\psi \in \Gamma$.

(3) אם $\neg(\phi \wedge \psi) \in \Gamma$ אז $\neg\phi \in \Gamma$ או $\neg\psi \in \Gamma$.

(4) אם $\neg(\phi \vee \psi) \in \Gamma$ אז $\neg\phi, \neg\psi \in \Gamma$.

(5) אם $\neg\neg\phi \in \Gamma$ אז $\phi \in \Gamma$.

(6) אם $\exists x\phi(x) \in \Gamma$ אז קיים שם עצם קבוע d כך ש- $\phi(d) \in \Gamma$.

(7) אם $\forall x\phi(x) \in \Gamma$ אז לכל שם עצם קבוע d בשפה קיים $\phi(d) \in \Gamma$.

(8) אם $\neg\exists x\phi(x) \in \Gamma$ אז לכל שם עצם קבוע d בשפה קיים $\neg\phi(d) \in \Gamma$.

(9) אם $\neg\forall x\phi(x) \in \Gamma$ אז קיים שם עצם קבוע d כך ש- $\neg\phi(d) \in \Gamma$.

(10) ב-Γ לא נמצא פסוק ושלילתו.

אז Γ עיקבית, כלומר יש לה מודל.

4. תהי $\phi(x)$ נוסחה שאין לה משתנים חופשיים פרט ל-x ושהקבוע האישי c אינו מופיע בה.
ענה על א'-ד' והוכח את תשובותיך.

א. האם $\models \forall x\phi(x) \rightarrow \phi(c)$?

ב. האם $\models \phi(c) \rightarrow \forall x\phi(x)$?

ג. נתון כי $\models \forall x\phi(x)$, האם $\models \phi(c)$?

ד. נתון כי $\models \phi(c)$, האם $\models \forall x\phi(x)$?

בהצלחה!

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתימטיקה

בחינה בלוגיקה מתימטית (1) (80423)

סמסטר הסתיו – תשס"ב – מועד ב'

המורים: פרופ' אהוד הרושובסקי, פרופ' עזריאל לוי הזמן: שעתיים

הבחינה מחולקת לשני חלקים. על התלמיד לענות על השאלה בחלק א' ועל שתי שאלות בחלק ב'. באותם מקרים בהם המינוח בשתי קבוצות ההרצאה היה שונה מובאים כאן המונחים ששימשו בכל אחת מן הקבוצות, היכן שאחד מהם מופיע בסוגריים.

חלק א': ענה על שאלה מס' 1

1. ענה בקצרה על השאלות א'-ד' הבאות. תשובה על כל אחת משאלות אלו צריכה להיות באורך של כחמש שורות לכל היותר.

א. הגדר מתי משתנה x הוא חופשי בנוסחה ϕ. תהי ϕ נוסחה עם משתנים חופשיים ו-ψ לנוסחה ללא משתנים חופשיים. אלו נתונים דרושים כדי לקבל את ערך האמת של ϕ ושל ψ.

ב. מדוע כל פסוק בתחשיב היחסים שקול לפסוק שבו לא מופיע אף כמת כולל $\forall$.

ג. מצא נוסחאות $\phi(x)$ ו-$\psi(x)$ בשפה שסימניה הם $+, \cdot, 0, 1, <$ כך שלמבנה הרגיל של המספרים הטבעיים קיים:
א. $\phi(x)$ אומרת ש-x הוא מספר ראשוני.
ב. $\psi(x)$ אומרת ש-x הוא חזקה של 2.
הקפד להשתמש רק בסימני השפה שנזכרו כאן.

ד. תהי L שפה שהסימן היחיד שלה הוא קבוע אישי אחד. כמה מבנים קיימים לשפה L שעולמם הוא בן שני איברים בדיוק ושאינם איזומורפיים זה לזה?

חלק ב': ענה על שתים מבין השאלות 2 עד 4 הבאות.

תשובותיך על השאלות צריכות לכלול הוכחות מלאות וברורות, אלא אם נאמר במפורש שאין צורך להוכיח. הקפד לצטט באופן מלא וברור את המשפטים בהם הנך משתמש. אם תענה על שלוש השאלות אז ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות.

2. ענה על אחת ורק על אחת משתי השאלות א' ו-ב'.

א. נסח והוכח את משפט השלמות מבחינת לוחות האמת של תחשיב הפסוקים, כלומר את המשפט שלכל לוח אמת יש קשר מתאים.

ב. הוכח כי כל פונקציה מ-$\{T,F\}^n$ ל-$\{T,F\}$ היא פונקצית האמת של פסוק כלשהו בתחשיב הפסוקים.

3. ענה על אחת ורק על אחת משתי השאלות א' ו-ב'.

א. תהי Γ קבוצת פסוקים עיקבית (ספיקה) בתחשיב היחסים שאף אחד מהם אינו מכיל את הקבוע האישי c, ויהי $\exists x \phi(x) \in \Gamma$. הוכח שגם הקבוצה $\Gamma \cup \{\phi(c)\}$ היא עיקבית (ספיקה), כאשר ש-$\phi(c)$ הוא תוצאת ההצבה של c עבור x ב-$\phi(x)$.

ב. נסח והוכח את המשפט הקושר בין היות פסוק ϕ של תחשיב היחסים סתירה לוגית או לא לבין תכונות עץ האמת של ϕ. אם תזדקק לדעת שלקבוצת פסוקים מסויימת יש מודל הוכח רק שלקבוצת הפסוקים יש את כל התכונות הדרושות כדי שיהיה לה מודל מבלי שתוכיח במפורט את קיום המודל.

4. הוכח את המשפט שאם $\mathcal{A}$ ו-$\mathcal{B}$ הם מבנים איזומורפיים אז אותם פסוקים אמיתיים בשניהם.

בהצלחה!

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתימטיקה

בחינה בלוגיקה מתימטית (1) (80423)

סמסטר הסתיו – תשס"ב – מועד ג'

המורים: פרופ' אהוד הרושובסקי, פרופ' עזריאל לוי הזמן: שעתיים

הבחינה מחולקת לשני חלקים. על התלמיד לענות על השאלה בחלק א' ועל שתי שאלות בחלק ב'. באותם מקרים בהם המינוח בשתי קבוצות ההרצאה היה שונה מובאים כאן המונחים ששימשו בכל אחת מן הקבוצות, היכן שאחד מהם מופיע בסוגריים.

חלק א': ענה על שאלה מס' 1

1. ענה בקצרה על השאלות א'-ד' הבאות. תשובה על כל אחת משאלות אלו צריכה להיות באורך של כחמש שורות לכל היותר.

א. הגדר את הערך של נוסחה בתחשיב היחסים, בהנחה שהערכים של שמות העצם כבר מוכרים.

ב. בשפה שסימנה היחיד, בנוסף על השיוויון, הוא סימן הכפל כתוב את הטענה שהכפל הוא חילופי, שכל איבר שהוא ריבוע הוא גם מכפלה של שני איברים שונים, והצגתו כמכפלה של שני איברים שונים היא יחידה, עד כדי הסדר בכתיבת המכפלה.

ג. הסבר מדוע קבוצת הפסוקים האמיתיים לוגית בשפה של תחשיב היחסים היא כריעה לחיוב.

ד. הגדר את ההצבה של קבוע אישי c עבור משתנה x בנוסחה ϕ, בהנחה שידועה לנו ההצבה של c עבור משתנה x בשם עצם t.

חלק ב': ענה על שתים מבין השאלות 2 עד 4 הבאות.

תשובותיך על השאלות צריכות לכלול הוכחות מלאות וברורות, אלא אם נאמר במפורש שאין צורך להוכיח. אם תענה על שלוש השאלות אז ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות.

2. א. הסבר באופן מפורט כיצד בודקים אם פסוק ϕ בתחשיב הפסוקים הוא טאוטולוגיה.
ב. הדגם את אלגוריתם הבדיקה שתארת על הפסוקים $(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$ ו- $(P \to Q) \to (Q \to P)$.

3. תהי Γ קבוצת פסוקים עיקבית מקומית (ספיקה סופית) בתחשיב הפסוקים, כלומר קבוצת פסוקים שכל תת-קבוצה סופית שלה היא עיקבית (ספיקה). הוכח כי לכל פסוק ϕ לפחות אחת הקבוצות $\Gamma \cup \{\phi\}$ ו- $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ היא עקבית מקומית (ספיקה סופית). אל תשתמש בהוכחה זאת במשפט הקומפקטיות.

4. תהי L שפת תורת המספרים (כלומר שסימניה הם $+, \cdot, 0, 1, <$), ותהי Ω קבוצת כל הפסוקים בשפה L שהם אמיתיים במבנה המספרים הטבעיים. הוכח את הקיום של שני מודלים של Ω שאינם איזומורפיים.

בהצלחה!